
Analyse de cascades de turbulences par des outils statistiques au-delà du spectre de puissance

Rapport de stage

Laboratoire de Physique de l'École Normale Supérieure

Maîtres de stage: Pierre Lesaffre et Erwan Allys

Enseignante référente: Emmanuelle Deleporte

23 mai 2022 - 1^{er} juillet 2022

Abstract

Les turbulences des écoulements en deux dimensions produisent des phénomènes structurés avec notamment des tourbillons dont les statistiques s'éloignent d'une description gaussienne. En utilisant des outils statistiques non linéaires fondés sur la Scattering Transform, nous nous proposons de quantifier la non-gaussianité et de caractériser la structure non gaussienne des cascades directe et inverse. Nous étudierons plusieurs indicateurs de non-gaussianité et leur évolution au cours de simulations, et montrerons les similarités de temps caractéristiques et les différences de gaussianité entre cascades.

Introduction

Les turbulences demeurent un domaine où peu de lois physiques ont été découvertes, au-delà de l'équation de Navier-Stokes. Une des plus célèbres d'entre elles est celle introduite par Kolmogorov [1] selon laquelle les tourbillons les plus grands dissipent leur énergie vers des tourbillons plus petits jusqu'à ce qu'ils atteignent l'échelle nécessaire pour se dissiper par viscosité.

L'axe Astrophysique du LPENS a pour sujet d'étude les écoulements en trois dimensions présents dans le milieu interstellaire et s'intéresse à présent à ceux à deux dimensions. Une telle étude pourrait trouver des applications dans d'éventuelles nappes de vorticité, par exemple les atmosphères des planètes gazeuses où l'épaisseur des couches est négligeable devant la circonférence de la planète ou bien les disques gazeux fins.

En deux dimensions, dans le cadre de l'hydrodynamique, Kraichnan a prédit [2] qu'il existait deux cascades turbulentes: une d'énergie ($\varepsilon \propto \frac{u^2}{2}$) vers les grandes échelles (ce qui joue un rôle dans la formation des cyclones par exemple), et une d'ensrophie (définie par $\zeta = \frac{\omega^2}{2}$ avec $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u}$ la vorticité), vers les petites échelles. Ces deux cascades, dénommées "directe" et "inverse", respectivement, donnent lieu à un spectre de puissance en lois de puissance. Nous nous intéresserons ici aux deux cascades séparément, que nous modéliserons à l'aide de simulations.

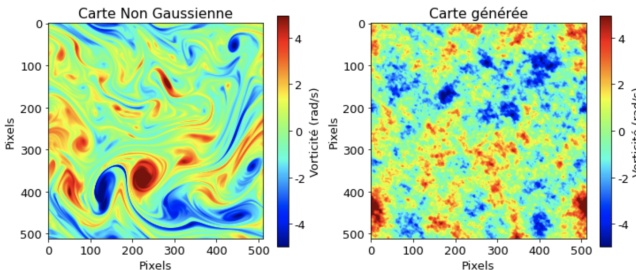


Figure 1: Gauche: Champ de vorticité issu d'une simulation de cascade directe. Droite: Champ gaussien de même spectre de puissance.

Le spectre de puissance à lui seul donne cependant des informations incomplètes. Il ne permet pas, en particulier, de distinguer un pro-

cessus contenant des structures gaussiennes, i.e. avec des composantes dans le plan de Fourier de phases statistiquement indépendantes, comme montré Fig. 1. Un champ gaussien peut dès lors être défini uniquement par son spectre de puissance.

Des outils statistiques capables de retranscrire les couplages entre les différentes échelles orientées sont donc nécessaires afin de caractériser et d'interpréter les cascades.

Pour la cascade inverse, en particulier, la littérature [3] rapporte un écart à la gaussianité plus faible que pour la cascade directe. Il faudra donc tester cette affirmation avec ces outils.

1 Présentation de la WST et de la RWST

La Wavelet Scattering Transform (WST) [4] est une méthode statistique permettant de caractériser les couplages entre échelles dans un processus. De manière générale, les Scattering Transforms sont écrites avec deux techniques: la séparation du processus sur les échelles par la convolution avec des ondelettes, et le couplage entre les échelles grâce à l'introduction de non-linéarités. L'ondelette d'origine choisie (ici l'ondelette de Morlet) est ensuite dilatée d'un facteur 2^j et tournée dans le plan de Fourier d'un angle $\frac{\pi\theta}{L}$, avec (j, θ) un couple d'entiers définissant l'ondelette obtenue. j pris inférieur à $J - 1$, avec J choisi comme égal à 7 pour une carte 512×512 afin de garder les détails importants. θ est pris inférieur à $L - 1$, avec L définissant le nombre d'angles concernés. Les coefficients de la WST sont définis par:

$$S_0 = \langle I \rangle$$

$$S_1(j_1, \theta_1) = \langle |I \star \psi_{j_1, \theta_1}| \rangle,$$

$$\text{avec } 0 \leq j_1 \leq J - 1 \text{ et } 0 \leq \theta_1 < L,$$

$$S_2(j_1, \theta_1, j_2, \theta_2) = \langle ||I \star \psi_{j_1, \theta_1}| \star \psi_{j_2, \theta_2}| \rangle,$$

$$\text{avec } 0 \leq j_1 < j_2 \leq J - 1$$

$$\text{et } 0 \leq \theta_1, \theta_2 < L$$

avec $\langle \cdot \rangle$ la moyenne spatiale sur le champ.

Les champs étant réels, $I(-k) = I(k)^*$, il n'est pas nécessaire de sonder tous les angles mais seulement jusqu'à $\frac{(L-1)\pi}{L}$.

Les coefficients S_1 s'interprètent par le sondage de l'échelle caractérisée par le couple (j_1, θ_1) , tandis que les coefficients S_2 caractérisent combien l'échelle (j_1, θ_1) est modulée par l'échelle (j_2, θ_2) .

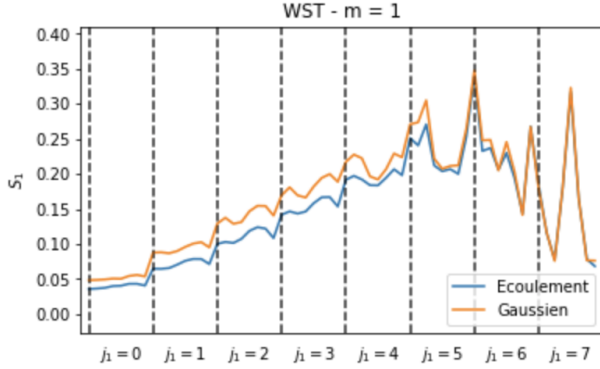


Figure 2: Comparaison des coefficients WST S_1 pour une cascade directe simulée et un champ gaussien correspondant. Aux petites échelles, les coefficients du champ gaussien sont plus grands.

La Reduced Wavelet Scattering Transform (RWST) [5] propose de mettre à profit les régularités angulaires de la carte, en séparant les dépendances isotropes et anisotropes, avec une direction privilégiée, des coefficients WST. Ils sont définis par :

$$\begin{aligned} \log_2 [S_1(j_1, \theta_1)] &= \hat{S}_1^{\text{iso}}(j_1) \\ &+ \hat{S}_1^{\text{aniso}}(j_1) \cos \left(2 \left[\theta_1 - \theta^{\text{ref},1}(j_1) \right] \right) \\ \log_2 [\bar{S}_2(j_1, \theta_1, j_2, \theta_2)] &= \hat{S}_2^{\text{iso},1}(j_1, j_2) \\ &+ \hat{S}_2^{\text{iso},2}(j_1, j_2) \cos \left(2 \left[\theta_1 - \theta_2 \right] \right) \\ &+ \hat{S}_2^{\text{aniso},1}(j_1, j_2) \cos \left(2 \left[\theta_1 - \theta^{\text{ref},2}(j_1, j_2) \right] \right) \\ &+ \hat{S}_2^{\text{aniso},2}(j_1, j_2) \cos \left(2 \left[\theta_2 - \theta^{\text{ref},2}(j_1, j_2) \right] \right) \end{aligned}$$

avec $\bar{S}_2$ les coefficients WST normalisés sur l'étage précédent (i.e. $\frac{S_2(j_1, j_2, \theta_1, \theta_2)}{S_1(j_1, \theta_1)}$).

Les coefficients et les angles de référence θ^{ref} proviennent d'un ajustement, et comportent donc des barres d'erreur, qui se rajoutent à celles issues des traitements statistiques qui suivent.

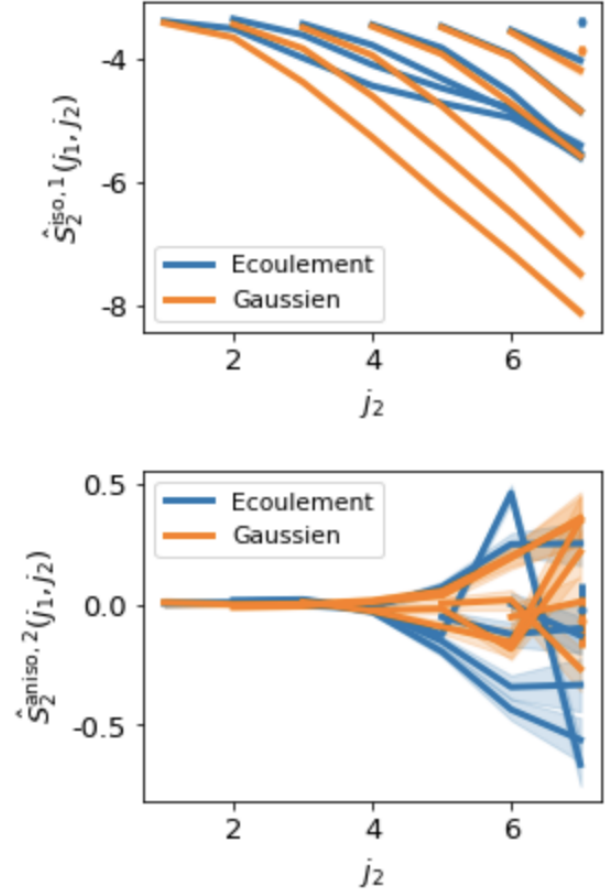


Figure 3: Comparaison des coefficients RWST $S_2^{\text{iso},1}$ et $S_2^{\text{aniso},1}$ pour une cascade inverse et un champ gaussien correspondant. Les pentes des $S_2^{\text{iso},1}$ sont plus importantes pour un champ gaussien.

2 Cascades directe et inverse

2.1 Description de la simulation

Les cascades turbulentes directe (vers les petites échelles) et inverse (vers les grandes) sont produites ici par simulation hydrodynamique. Le rotationnel de l'équation de Navier-Stokes qui régit les écoulements incompressibles visqueux (cadre pris ici) est :

$$\partial_t \omega + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \omega = \alpha(\omega_f - \omega) + \nu \Delta \omega \quad (1)$$

La simulation étant en 2D, $\vec{\omega}$ est orthogonal au plan simulé et peut être considéré comme étant scalaire. La vitesse $\vec{u}$ peut être déduite de ω dans

le plan de Fourier par $\vec{u} = \frac{i\omega}{k^2} \begin{bmatrix} k_y \\ -k_x \end{bmatrix}$

Le terme ω_f est un terme de forçage, grâce à des ondes planes, correspondant à une injection d'énergie ou d'entrophie à une certaine échelle, de laquelle découleront les cascades. L'amplitude

constante du terme de forçage est choisie afin que le taux d'injection d'énergie soit le plus constant dans le temps possible. L'échelle du forçage est déterminée de sorte à n'étudier qu'une cascade à la fois. Ainsi, le forçage de la cascade directe est à l'échelle $k = 2 \text{ pixels}^{-1}$ et celui de la cascade inverse à l'échelle $k = 100 \text{ pixels}^{-1}$, pour une taille de simulation de 512×512 .

Les simulations ont toutes été faites par une méthode spectrale. Ce nombre réduit de pixels empêche la vérification de notamment les lois de puissance correctes dans le spectre de puissance, prédites par Kolmogorov et Kraichnan.

La condition initiale est un champ gaussien généré aléatoirement avec les bons modèles de puissance théoriques dans le spectre de puissance, afin d'étudier la disparition de ce caractère gaussien de la manière la plus proche de la réalité. En raison d'artefacts numériques apparaissant spontanément au cours de la simulation (effet d'*aliasing*) [6] aux très petites échelles, le spectre est artificiellement tronqué à $\frac{2}{3}k_{max}$.

Dans toute l'étude, les échelles de temps sont exprimées en temps de retournement initial, i.e. le temps tel que deux écoulements puissent être considérés comme indépendants, d'après la taille de la boîte $L = 2\pi$ et la vitesse RMS initiale selon $t_r = \frac{L}{u_{RMS}}$.

J'ai travaillé sur 520 images de cascade directe et 1289 de cascade inverse, réalisées par mon maître de stage.

2.2 Analyse par WST et RWST

Je me suis occupé de la création d'approximations de cartes gaussiennes et de leur analyse. Une manière de produire un champ (quasi-)gaussien à partir d'une carte quelconque revient à ajouter aux modes de Fourier une phase aléatoire, prise avec une distribution uniforme. Les cartes gaussiennes obtenues présentent le même spectre de puissance qu'un champ provenant de la turbulence, mais ont des différences dans leurs WST et RWST.

La première couche de WST, qui comme le spectre de puissance caractérise l'amplitude à une échelle donnée, laisse clairement apercevoir l'isotropie moyenne de la simulation (à j fixé, les coefficients sont quasi-constants), ainsi que l'allure générale des cascades en lois de puissance. Cette isotropie est visible Fig. 3: les coefficients de la RWST traçant l'anisotropie sont tous compatibles avec 0 aux barres d'erreur près et les angles d'anisotropie calculés par ajustement semblent uniformément

répartis avec de grandes barres d'erreur.

Il est possible de dégager plusieurs indicateurs de non-gaussianité, développés au cours du stage:

- Les coefficients S_1 sont liés à la norme L_1 des transformées en ondelettes. Or la parcimonie des structures est liée au rapport $\frac{L_1}{L_2}$. Une transformée issue de la simulation et celle d'un champ gaussien correspondant ayant le même spectre de puissance, ils ont la même norme L_2 . Ceci traduit le fait que des structures intenses sont moins courantes pour une carte gaussienne pour une même bande de fréquence.

Par conséquent, on peut construire un premier indicateur de non-gaussianité qui caractérise la parcimonie/*sparsity*:

$$Spars(j_1, t) = \text{moy}_{\theta, g} \left| \frac{S_{1,g}(j_1, \theta) - S_{1, \text{sim}}(j_1, \theta)}{S_{1,g}(j_1, \theta)} \right|$$

en moyennant sur les angles et sur des cartes gaussiennes aléatoirement générées. Il est possible de montrer [7], en effet, que les coefficients de WST de la première couche (S_1 , aussi appelés du *premier ordre*) sont plus grands pour une carte gaussienne que pour une carte non gaussienne issue de la simulation. Cette différence n'est cependant visible que sur les coefficients WST, en raison du passage au logarithme qui rétrécit dans ce cas les différences. En raison du temps de calcul des WST et RWST (2 minutes par carte 512×512), 15 cartes gaussiennes sont produites à partir de chaque carte issue de la simulation.

- Les coefficients de la RWST au 2^e ordre caractérisant l'isotropie dépendent de deux échelles définies par deux couples (j_1, θ_1) et (j_2, θ_2) . Par définition, cette série de coefficients ne dépend pas des angles. À j_1 fixé, la série de coefficients décroît en fonction de j_2 plus vite pour une carte gaussienne que pour une carte non gaussienne, plus exactement en $j_1^{-\frac{1}{2}}$. [8] Un phénomène s'apparentant à la conservation de l'énergie [4] entraîne en effet qu'une baisse des coefficients du premier ordre amène une hausse des coefficients des ordres supérieurs. J'ai choisi une approche comme la méthode précédente et défini un indicateur

$$Ind(j_1, t) = \text{moy}_{g, j_2} |S_{Iso, g}(j_1, j_2) - S_{Iso, \text{sim}}(j_1, j_2)|$$

On moyenne toujours sur les cartes gaussiennes. On moyenne en revanche sur les échelles couplées j_2 .¹

- Une dernière méthode choisie à partir des coefficients RWST précédents consiste à calculer la différence de pente entre les courbes issues des cartes gaussiennes et simulées, critère pertinent comme illustré Fig. 3. Bien que donnant des temps caractéristiques d'atteinte du régime stationnaire similaires au second indicateur, un ajustement linéaire de la pente est peu convergent dans le cas notamment de la cascade directe car les coefficients prennent une forme de courbe en cloche plutôt que linéaire.

2.3 Etude dynamique des deux cascades

Il est possible de suivre l'évolution de ces indicateurs dans le temps. Pour la plupart des indicateurs, nous avons modélisé leurs évolutions à des petits j_1 par des régimes transitoires exponentiels, et déduit ainsi un temps caractéristique de stationnarité. Comme on peut le voir Fig. 5, les temps caractéristiques pour les deux cascades sont similaires (de l'ordre de 0.3 temps de retournement pour la sparsity, et 0.1 pour les autres indicateurs), mais systématiquement la non-gaussianité est plus importante pour la cascade directe que pour la cascade inverse, d'un facteur 10 dans notre métrique, comme illustré Fig. 4.

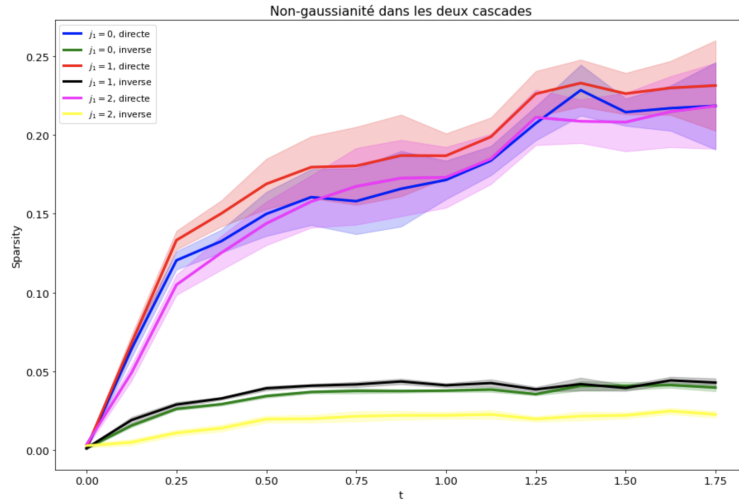


Figure 4: Evolution de la parcimonie en fonction du temps, pour les petites échelles et les deux cascades

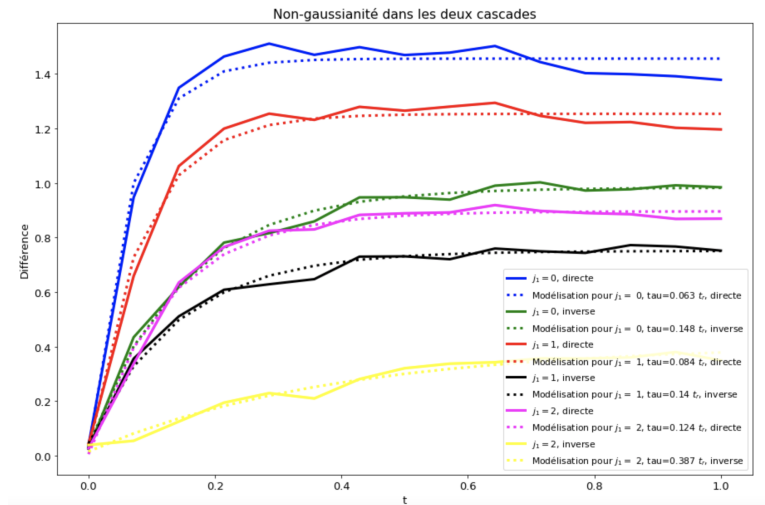


Figure 5: Evolution du deuxième indicateur en fonction du temps, pour les petites échelles et pour les deux cascades, normalisé au régime stationnaire, et modélisation exponentielle

¹Il n'y a plus de division car les véritables coefficients RWST sont pris au logarithme, donc la différence est déjà une différence relative.

Pour de grands j_1 , le nombre de pixels à sonder trop petit entraîne que les indicateurs ne présentent pas de régime stationnaire exponentiel décroissant. Leur évolution n'est donc pas modélisable de la façon précédente. De plus, les déviations à la gaussianité fluctuent trop avec le nombre de cartes gaussiennes avec lesquelles les indicateurs sont calculés.

Conclusion

La WST et la RWST ont permis d'apporter plusieurs éclairages aux questions étudiées: la répartition de l'énergie et de l'enstrophie, modélisée par les équations hydrodynamiques de Navier-Stokes 2D, crée des structures qui s'éloignent d'un champ gaussien. Plus spécifiquement, la cascade

directe produit des indicateurs de non-gaussianité bien plus élevés que la cascade inverse, mais dans les deux cas le comportement est résolument non gaussien. Il est nécessaire de rappeler cependant que certaines caractéristiques des écoulements (lois de puissance de Kolmogorov) ne se développent qu'avec une grande résolution: un pan de l'analyse sur la décroissance réelle des coefficients en fonction des échelles reste en suspens. D'un point de vue plus personnel, ce stage m'a permis de m'initier à la démarche scientifique et à la succession de questionnements. A partir de l'étude d'un problème initial sur les cascades, des allers-retours entre simulations, résultats et hypothèses m'ont permis de comprendre le travail de recherche nécessaire. Je remerciais enfin Pierre Lesaffre et Erwan Allys pour leurs conseils et pour m'avoir guidé tout au long de mon stage.

References

- [1] A. Kolmogorov. “The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds’ Numbers”. *Doklady Akademii Nauk SSSR* 30 (1941), pp. 301–305.
- [2] R. Kraichnan. “Inertial Ranges in Two-Dimensional Turbulence ”. *The Physics of Fluids* 10 (1967).
- [3] G. Bofetta, F. Celani, and M. Vergalossa. “Inverse energy cascade in two-dimensional turbulence: Deviations from Gaussian behavior”. *Physical review A, Atomic, molecular, and optical physics* 61 (2000).
- [4] J. Bruna and S. Mallat. “Invariant Scattering Convolution Networks”. (2012).
- [5] E. Allys, F. Levrier, S. Zhang, C. Colling, B. Régaldo-Saint Blancard, F. Boulanger, P. Hennebelle, and S. Mallat. “The RWST, a comprehensive statistical description of the non-Gaussian structures in the ISM”. *Astronomy & Astrophysics* (2019).
- [6] G. Lesur and P. Y. Longaretti. “Impact of dimensionless numbers on the efficiency of magnetorotational instability induced turbulent transport”. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 378 (2007), p. 1476.
- [7] B. Régaldo-Saint Blancard, F. Levrier, E. Allys, E. Bellomi, and F. Boulanger. “Statistical description of dust polarized emission from the diffuse interstellar medium”. *Astronomy & Astrophysics* 642 (2020).
- [8] J. Bruna, S. Mallat, E. Bacry, and J. F. Muzy. “Intermittent Process Analysis with Scattering Moments”. *The Annals of Statistics* 43 (2015), pp. 323–351.